



Entwicklung von p-Mehrgitter-Verfahren für turbulente Strömungen

Marcel Wallraff

Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik
DLR
10.11.2011



Übersicht

Motivation

- DG-Verfahren
- Gleichungen

p-Mehrgitter

- Voraussetzungen
- Algorithmus

Numerische Ergebnisse

- Ebene Platte
- RAE2822 Profil



Übersicht

Motivation

- DG-Verfahren
- Gleichungen

p-Mehrgitter

- Voraussetzungen
- Algorithmus

Numerische Ergebnisse

- Ebene Platte
- RAE2822 Profil



Motivation

- ▶ Heutige CFD Löser basieren zum grössten Teil auf Finite Volumen Verfahren zweiter Ordnung.
- ▶ Verfahren höhere Ordnung versprechen höhere Genauigkeit und Effizienz.



Motivation

- ▶ Heutige CFD Löser basieren zum grössten Teil auf Finite Volumen Verfahren zweiter Ordnung.
- ▶ Verfahren höhere Ordnung versprechen höhere Genauigkeit und Effizienz.
 - ▶ Discontinuous Galerkin (DG) Verfahren

Motivation

- ▶ Heutige CFD Löser basieren zum grössten Teil auf Finite Volumen Verfahren zweiter Ordnung.
- ▶ Verfahren höhere Ordnung versprechen höhere Genauigkeit und Effizienz.
 - ▶ Discontinuous Galerkin (DG) Verfahren
- ▶ Um höhere Ordnungs Verfahren in der Praxis anwenden zu können, müssen alle Vorteile, die diese bieten, auch genutzt werden:



Motivation

- ▶ Heutige CFD Löser basieren zum grössten Teil auf Finite Volumen Verfahren zweiter Ordnung.
- ▶ Verfahren höhere Ordnung versprechen höhere Genauigkeit und Effizienz.
 - ▶ Discontinuous Galerkin (DG) Verfahren
- ▶ Um höhere Ordnungs Verfahren in der Praxis anwenden zu können, müssen alle Vorteile, die diese bieten, auch genutzt werden:
 - ▶ Jacobiblöcke sind lokal auf jeder Gitterzelle.
 - ▶ Keine besondere Behandlung für unstrukturierte Netze nötig.
 - ▶ Einfache h - und p -Adaption des Netzes ist möglich.
 - ▶ Hängende Knoten im Netz sind zulässig.

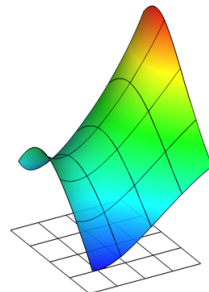
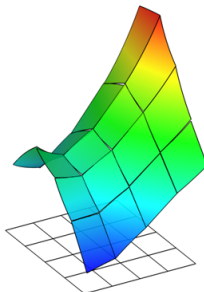
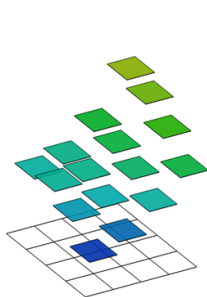
Einführung in DG-Verfahren

- ▶ DG-Verfahren sind Finite Elemente Methoden.
- ▶ Bei DG-Verfahren wird jedoch keine Stetigkeit der Basispolynome zwischen zwei Gitterzellen vorausgesetzt.
- ▶ Um die Oberflächenintegrale der schwachen Formulierung auf dem Rand jeder Gitterzelle zu lösen werden wie bei den Finiten Volumen numerische Flüsse verwendet.

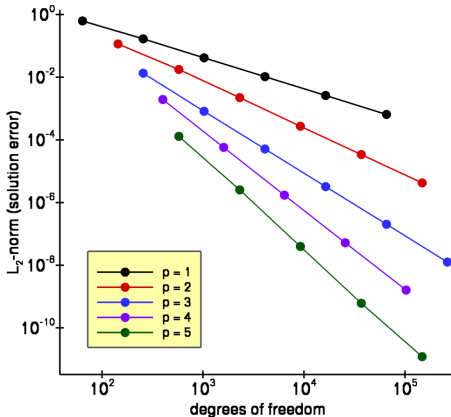


Einführung in DG-Verfahren

- ▶ DG-Verfahren sind Finite Elemente Methoden.
- ▶ Bei DG-Verfahren wird jedoch keine Stetigkeit der Basispolynome zwischen zwei Gitterzellen vorausgesetzt.
- ▶ Um die Oberflächenintegrale der schwachen Formulierung auf dem Rand jeder Gitterzelle zu lösen werden wie bei den Finiten Volumen numerische Flüsse verwendet.



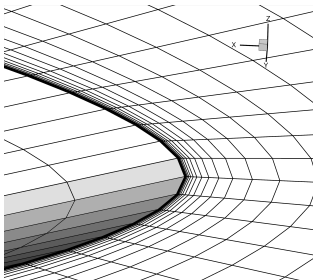
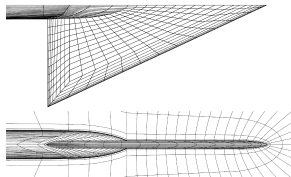
Höhere Ordnung und Konvergenz



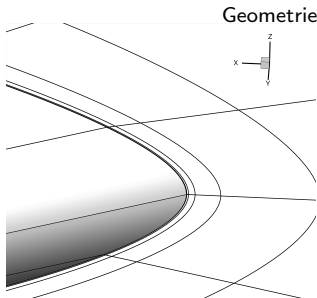
- ▶ Durch die höhere Ordnung werden die Freiheitsgrade reduziert um eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen.
- ▶ Den Polynomgrad zu erhöhen kann mehr bringen als das Netz zu verfeinern.
- ▶ Wenn die Lösung glatt genug ist, ist der Vorteil der durch die höhere Ordnung entsteht nutzbar.

VFE-2 Delta-Flügel mit abgerundeter Vorderkante

- ▶ Das ursprüngliche Netz mit 884 224 Elementen wurde zwei mal agglomeriert.
- ▶ Dann hat das größte Netz 13 816 gekrümmte Elemente.



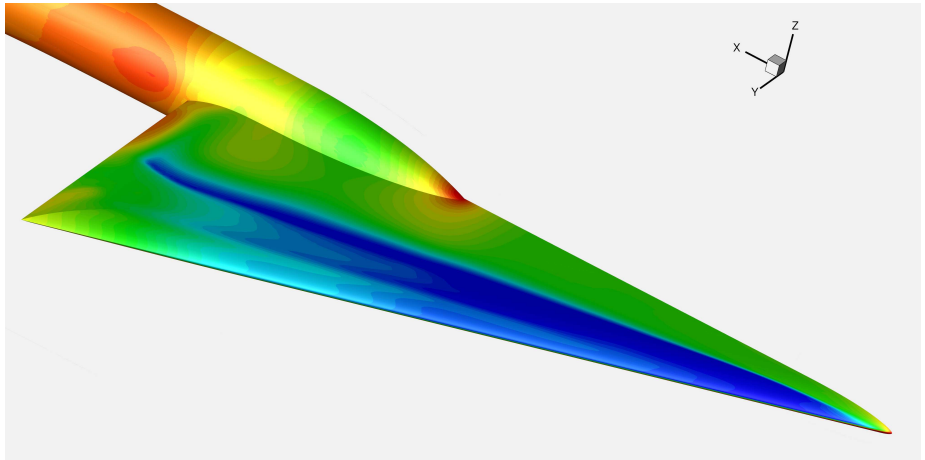
Original Netz
mit graden Rändern.



Gekrümmtes Netz mit
Rändern aus Polynomen von Grad 4

Transsonische Strömung um den VFE-2 Delta-Flügels

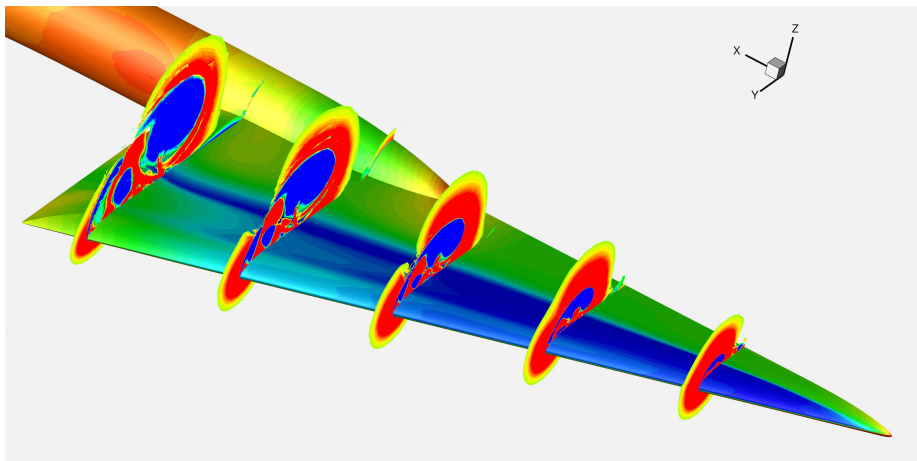
Turbulente Strömung mit $M = 0.8$, $\alpha = 20.5^\circ$ and $Re = 2 \times 10^6$.



4^{te}-Ordnungs Lösung auf einem Netz mit 201 259 gekrümmten Elementen welches Residuen-basiert verfeinert wurde.

Transsonische Strömung um den VFE-2 Delta-Flügels

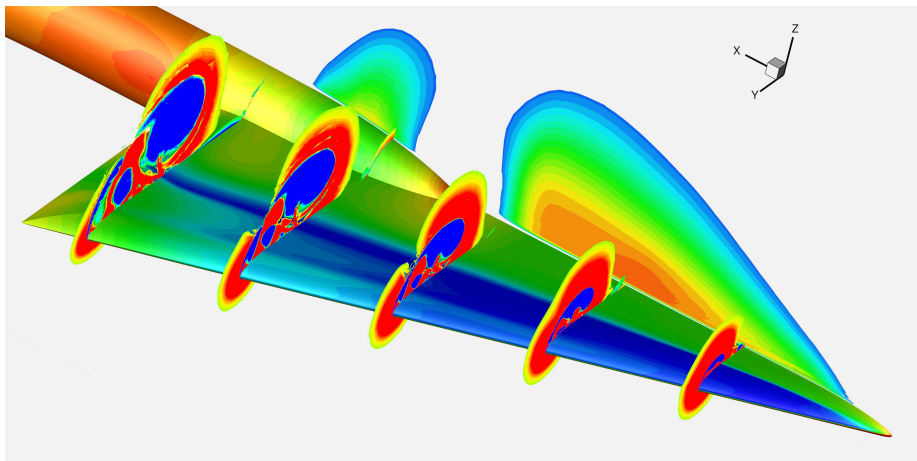
Turbulente Strömung mit $M = 0.8$, $\alpha = 20.5^\circ$ and $Re = 2 \times 10^6$.



4^{te}-Ordnungs Lösung auf einem Netz mit 201 259 gekrümmten Elementen welches Residuen-basiert verfeinert wurde.

Transsonische Strömung um den VFE-2 Delta-Flügels

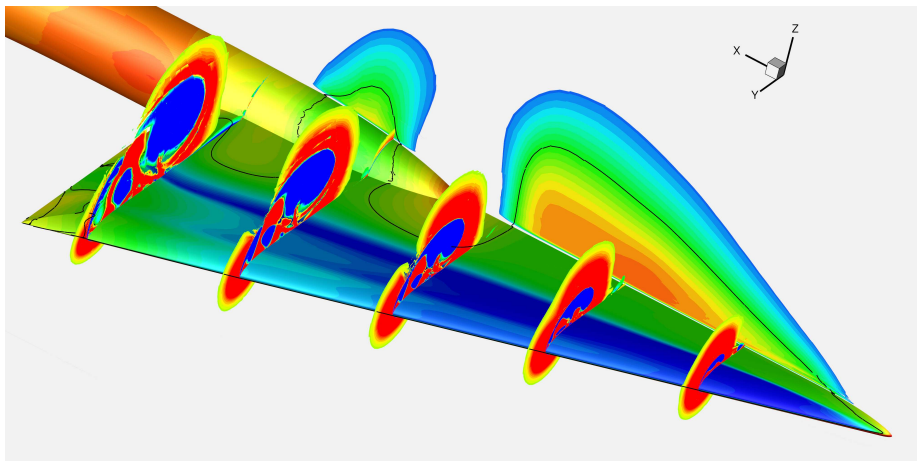
Turbulente Strömung mit $M = 0.8$, $\alpha = 20.5^\circ$ and $Re = 2 \times 10^6$.



4^{te}-Ordnungs Lösung auf einem Netz mit 201 259 gekrümmten Elementen welches Residuen-basiert verfeinert wurde.

Transsonische Strömung um den VFE-2 Delta-Flügels

Turbulente Strömung mit $M = 0.8$, $\alpha = 20.5^\circ$ and $Re = 2 \times 10^6$.



4^{te}-Ordnungs Lösung auf einem Netz mit 201 259 gekrümmten Elementen welches Residuen-basiert verfeinert wurde.

Grundgleichungen

Betrachtet werden:

- ▶ Die Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) Gleichungen, inklusive eines $k\omega$ Turbulenz-Modells, für Stationäre Strömungen.
- ▶ Diese sind implementiert im PADGE-Code, einem DG-Code des DLR. Dieser ist ein C++ Code, der auf den Bibliotheken `deal.II` und `PETSc` basiert.

Motivation für die Einführung eines neuen Lösungsverfahrens

Bisheriges Lösungsverfahren im PADGE-Code:

- ▶ Nichtlinearer Löser: Backward-Euler.
- ▶ Linearer Löser: Krylov-Verfahren GMRes mit ILU(0) Vorkonditionierer.
- ▶ Nachteile: Vollständige Jacobimatrix wird berechnet und zwei mal gespeichert für den Löser und den Vorkonditionierer.



Motivation für die Einführung eines neuen Lösungsverfahrens

Bisheriges Lösungsverfahren im PADGE-Code:

- ▶ Nichtlinearer Löser: Backward-Euler.
- ▶ Linearer Löser: Krylov-Verfahren GMRes mit ILU(0) Vorkonditionierer.
- ▶ Nachteile: Vollständige Jacobimatrix wird berechnet und zwei mal gespeichert für den Löser und den Vorkonditionierer.
 - ▶ Idee: p-Mehrgitter Verfahren.
 - ▶ Arbeitsspeicher sparen durch Glätter auf den höheren Polynomgraden und Löser auf dem niedrigsten Polynomgrad.

Übersicht

Motivation

- DG-Verfahren
- Gleichungen

p-Mehrgitter

- Voraussetzungen
- Algorithmus

Numerische Ergebnisse

- Ebene Platte
- RAE2822 Profil



Nichtlineares p -Mehrgitterverfahren

In Analogie zu einem h -Mehrgitter:

Eine Hierarchie von linearen Funktionenräumen

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{V}_{h,p_{\min}} & \subset & \mathbf{V}_{h,p_{\min}+1} & \subset & \cdots & \subset & \mathbf{V}_{h,p-1} \subset \mathbf{V}_{h,p} \\ \mathbb{R}^{n_{h,p_{\min}}} & & \mathbb{R}^{n_{h,p_{\min}+1}} & & \cdots & & \mathbb{R}^{n_{h,p-1}} & \mathbb{R}^{n_{h,p}} \end{array}$$

Transfer-Operatoren:

- ▶ Der Prolongations-Operator ist die natürliche Injektion: $I_{l-1}^l : \mathbb{R}^{n_{h,l-1}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{h,l}}$
- ▶ Restriktions-Operator: $(I_{l-1}^l)^\top$

Ausserdem benötigt das p -Mehrgitterverfahren noch eine Restriktion.

- ▶ Restriktion des nichtlinearen Lösungsvektors:
Orthogonale L^2 -Projektion $\hat{I}_l^{l-1} : \mathbf{V}_{h,l} \rightarrow \mathbf{V}_{h,l-1}$.

Nichtlineares p -Mehrgitterverfahren

Sei das nichtlineare Problem auf dem feinen Level p definiert als:

$$\mathbf{L}_p(\mathbf{u}_p) = \mathbf{f}_p.$$

Der nichtlineare p -Mehrgitteralgorithmus $NMG(\mathbf{f}_l, \mathbf{u}_l, m, l, p_{min}, \tau)$:

If $l = p_{min}$, Löse: $\mathbf{L}_{p_{min}}(\mathbf{u}_{p_{min}}) = \mathbf{f}_{p_{min}}$.

Sei diese Lösung definiert als $\tilde{\mathbf{u}}_{p_{min}}$.

If $l > p_{min}$

1. For $i = 1$ to m do $\mathbf{u}_l \leftarrow GL_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{f}_l)$. /* Vorglätten */

2. Die Restriktion der Lösung $\mathbf{u}_{l-1}^0 := \hat{l}_l^{l-1} \mathbf{u}_l$.

Berechne neue Rechte Seite für das gröbere Level:

$$\mathbf{f}_{l-1} \leftarrow \mathbf{f}_{l-1} + l_l^{l-1} (\mathbf{f}_l - \mathbf{L}_l(\mathbf{u}_l)) - (\mathbf{f}_{l-1} - \mathbf{L}_{l-1}(\mathbf{u}_{l-1}^0))$$

For $k = 1$ to τ do $\mathbf{u}_{l-1}^k := NMG(\mathbf{f}_{l-1}, \mathbf{u}_{l-1}^{k-1}, m, l-1, p_{min}, \tau)$.

Set $\tilde{\mathbf{u}}_l \leftarrow \mathbf{u}_l + l_l^l (\mathbf{u}_{l-1}^\tau - \mathbf{u}_{l-1}^0)$.

3. For $i = 1$ to m do $\tilde{\mathbf{u}}_l \leftarrow GL_l(\tilde{\mathbf{u}}_l, \mathbf{f}_l)$. /* Nachglätten */

Return $\tilde{\mathbf{u}}_l$.



Nichtlineares p -Mehrgitterverfahren

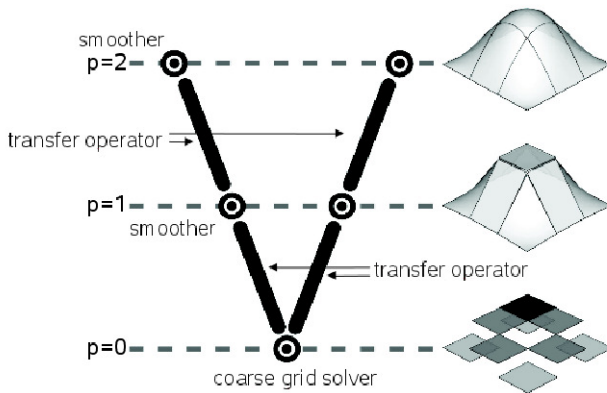


Figure: p -Mehrgitteralgorithmus: V-Zyklus.

Übersicht

Motivation

- DG-Verfahren
- Gleichungen

p-Mehrgitter

- Voraussetzungen
- Algorithmus

Numerische Ergebnisse

- Ebene Platte
- RAE2822 Profil



Numerisches Vorgehen für die folgenden Testfälle

- ▶ Es wurde immer als Glätter und Löser ein matrix-frei implementiertes Backward Euler Verfahren verwendet.
- ▶ Zur Vorkonditionierung des linearen Gleichungssystems wurde ein auf Linien basierender Vorkonditionierer implementiert.
 - ▶ Sei $Ax = b$ das zu lösende lineare Gleichungssystem,
 $\delta x^k = x^k - x^{k-1} = D^{-1}(b - Ax^{k-1})$,
 $x^k = x^{k-1} + \delta x^k$,
wobei D^{-1} die invertierte Jacobimatrix ist basierend auf Linien.
- ▶ Bei jeder vorgestellten Rechnung ist $p_{min} = p - 1$.
- ▶ Das lineare Gleichungssystem wird in jedem Schritt mit einem GMRes Verfahren gelöst.

Turbulente Strömung über die ebene Platte

Netz der ebenen Platte mit 2240 Zellen.

Also für $p=1$: 40320 DoFs, $p=2$: 80640 DoFs, $p=3$: 134400 DoFs.

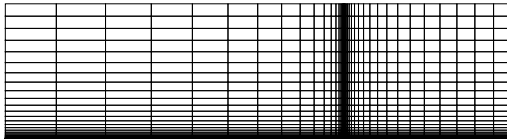


Figure: Strukturiertes Netz der ebenen Platte

Turbulente Strömung über die ebene Platte

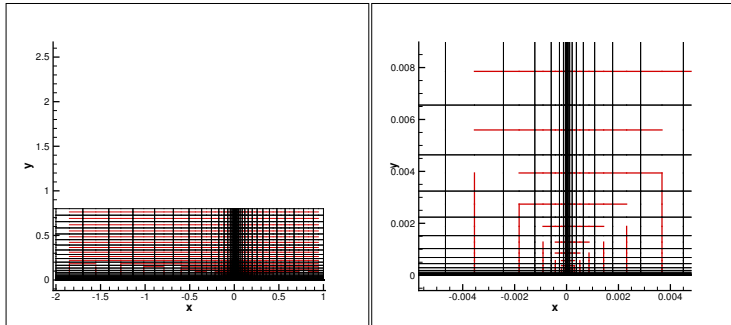


Figure: Linien im Netz der ebenen Platte.

Turbulente Strömung über die ebene Platte

Ebene Platte: $Re = 10 \cdot 10^6$, $M = 0.3$, $\alpha = 0^\circ$.

p -Mehrgitter: $p = 2$, $p_{min} = 1$.

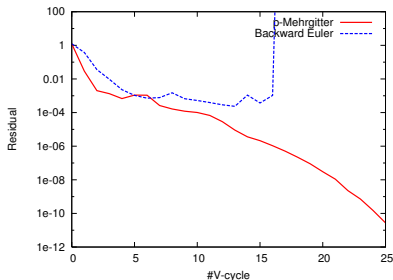


Figure: Konvergenzplot der ebenen Platte.

Es wurden jeweils der matrix-freie Backward Euler auf dem Level $p = 2$ verwendet, einmal als Löser und einmal als Glätter mit exakt denselben Einstellungen. Das Residuum der zugrunde liegenden linearen Probleme wurde jeweils nur um eine halbe Grössenordnung reduziert.

Turbulente Strömung über die ebene Platte

Ebene Platte: $Re = 10 \cdot 10^6$, $M = 0.3$, $\alpha = 0^\circ$.

p -Mehrgitter: $p = 2$, $p_{min} = 1$.

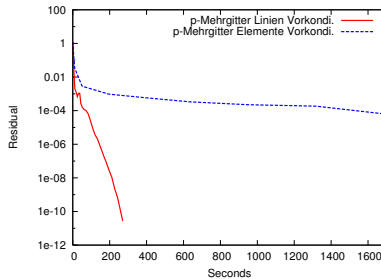


Figure: Zeitlicher Verlauf der Residuenreduktion

Turbulenter Strömung um das RAE2822 Profil

Netz des RAE2822 Profils mit 2024 Zellen. Also für

$p = 0$: 12148 DoFs, $p = 1$: 36432 DoFs, $p = 2$: 72864 DoFs, $p = 3$: 121440 DoFs.

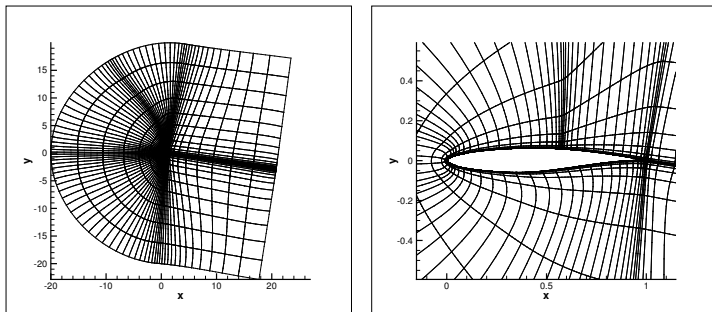


Figure: Strukturiertes Netz des RAE2822 Profils

Turbulenter Strömung um das RAE2822 Profil

RAE2822: $Re = 1 \cdot 10^6$, $M = 0.4$, $\alpha = 1^\circ$.

Full-Multigrid mit Groblevel $p - 1$: $NMG(p_{\min}, \cdot)$, $NMG(p_{\min} + 1, \cdot)$, \dots

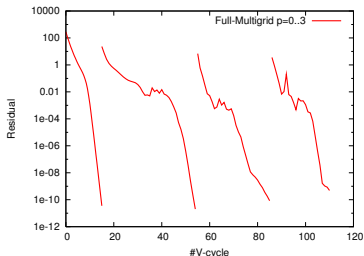


Figure: Konvergenzplot eines Full-Multigrid von $p=0$ bis $p=3$ des RAE2822 Profils.



Ende

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.



Linienkonstruktion

Konvektions-Diffusions Linien:

- ▶ $L(u) = f$, wobei $L(u) = -\nabla \cdot (a(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u$,
mit $f = 0$, $b(x)$ Lösung des Strömungsfeldes, $a(x)$ als Eingabe des Users.
- ▶ Diese Gleichung wird mit Polynomen vom Grad 0 betrachtet. Dann ist $L(u)$ die Gewichts-Matrix der Kanten zwischen den Zellen.

Geometrische Linien:

- ▶ Bei der geometrischen Liniensuche werden inverse Abstände der Zellmittelpunkte verwendet als Entscheidung ob eine Linie konstruiert werden soll. Mit diesem Vorgehen findet man alle Anisotropien im Netz.